

Bài 1: Rút gọn các biểu thức

a) $P = \sqrt{12} - \sqrt{27} + 2\sqrt{48}$

b) $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} + \frac{1}{\sqrt{x}-3} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 9$

Bài 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

Bài 3: Cho phương trình bậc hai $x^2 - 4x + m + 1 = 0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình khi $m = 3$

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3(x_1 + x_2)$

Bài 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $y = (m^2 + 1)x + m$ và đường thẳng $y = 5x + 2$. Tìm m để hai đường thẳng đó song song với nhau

Bài 5: Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N thuộc (O)). Qua A vẽ một đường thẳng cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, C phân biệt (B nằm giữa A, C). Gọi H là trung điểm đoạn thẳng BC

a) Chứng minh rằng tứ giác AMHN nội tiếp được đường tròn

b) Chứng minh rằng $AM^2 = AB \cdot AC$

c) Đường thẳng qua B song song với AM cắt đoạn thẳng MN tại E. Chứng minh rằng $EH \parallel MC$

Bài 6: Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $0 < x < 1, 0 < y < 1$

Chứng minh rằng $x + y + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

LỜI GIẢI

Bài 1: a) $P = \sqrt{4 \cdot 3} - \sqrt{9 \cdot 3} + 2\sqrt{16 \cdot 3} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

b) $Q = \left[\frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} + \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} = \left[\frac{\sqrt{x}-3+\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$
 $= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}-3}$

Bài 2: Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 2y \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Bài 3: a) Khi $m = 3$ ta có phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Phương trình có nghiệm kép $x = 2$

b) Ta có $\Delta' = (-2)^2 - (m + 1) = 4 - m - 1 = 3 - m$

Để phương trình bậc hai đã cho có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $\Delta' > 0 \Rightarrow 3 - m > 0 \Leftrightarrow m < 3$

Khi đó theo hệ thức Viets ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = m + 1 \end{cases}$

Theo bài ra $x_1^2 + x_2^2 = 3(x_1 + x_2) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3(x_1 + x_2) \Rightarrow 4^2 - 2(m + 1) = 3 \cdot 4$

$\Leftrightarrow 16 - 2m - 2 = 12 \Leftrightarrow 2m = 2 \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn điều kiện $m < 3$)

Vậy $m = 1$ thỏa mãn bài toán

Bài 4: Để hai đường thẳng $y = (m^2 + 1)x + m$ và $y = 5x + 2$ song song với nhau thì

$\begin{cases} m^2 + 1 = 5 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 4 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq 2 \end{cases} \Rightarrow m = -2$

Vậy $m = -2$ thỏa mãn bài toán

Bài 5: a) Theo gt AM, AN là các tiếp tuyến với đường tròn (O) nên

$\begin{cases} AM \perp OM \\ AN \perp ON \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \angle AMO = 90^\circ \\ \angle ANO = 90^\circ \end{cases}$

Ta lại có $HB = HC$ (gt)

$\Rightarrow OH \perp BC$ (đường kính đi qua

trung điểm dây cung) $\Rightarrow \angle AHO = 90^\circ$.

Do đó $\angle AMO = \angle ANO = \angle AHO = 90^\circ$

Điểm M, N, H cùng nhìn đoạn thẳng AO dưới

1 góc bằng 90° nên năm điểm A, M, O, H, N cùng thuộc một đường tròn (Bài toán cung chứa góc)

Suy ra tứ giác AMHN nội tiếp được đường tròn

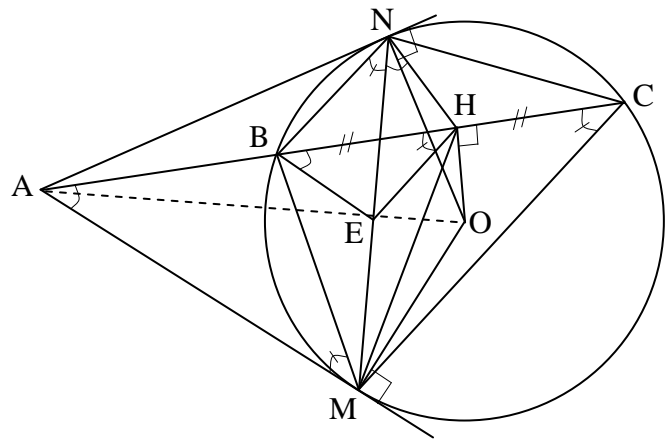
b) Xét $\angle AMB$ và $\angle ACM$ có A chung và $\angle AMB = \angle ACM$ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung, góc nội tiếp cùng chắn BM) nên $\angle AMB < \angle ACM$ (g - g) $\Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AM} \Rightarrow AM^2 = AB \cdot AC$ (đpcm)

c) Theo câu a, tứ giác AMHN nội tiếp $\angle HAM = \angle HNM$ (góc nội tiếp cùng chắn HM)

Mặt khác, vì $BE \parallel AM$ (gt) $\Rightarrow \angle HAM = \angle HBE$ (đồng vị). Do đó $\angle HNM = \angle HBE$ hay $\angle HNE = \angle HBE$, suy ra điểm B, N cùng nhìn HE dưới 1 góc bằng nhau nên tứ giác HNBE nội tiếp được đường tròn (Bài toán cung chứa góc).

Từ đó ta có $\angle EHB = \angle ENB$ (góc nội tiếp cùng chắn BE); $\angle ENB = \angle MCB$ (góc nội tiếp cùng chắn BM)

Suy ra $\angle EHB = \angle MCB \Rightarrow EH \parallel MC$ (góc đồng vị bằng nhau) (đpcm)



Bài 6: Cách 1: Ta có $x + y + x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = x + y + \sqrt{3} \left(\sqrt{\frac{x^2}{3}(1 - y^2)} + \sqrt{\frac{y^2}{3}(1 - x^2)} \right)$ (vì $x, y > 0$)

Theo gt thì $0 < x; y < 1$. Áp dụng BĐT CauChy cho các số dương $\frac{x^2}{3}; 1-y^2$ và $\frac{y^2}{3}; 1-x^2$ ta có:

$$\begin{cases} 2\sqrt{\frac{x^2}{3}(1-y^2)} \leq \frac{x^2}{3} + (1-y^2) \\ 2\sqrt{\frac{y^2}{3}(1-x^2)} \leq \frac{y^2}{3} + (1-x^2) \end{cases} \Rightarrow 2\left(\sqrt{\frac{x^2}{3}(1-y^2)} + \sqrt{\frac{y^2}{3}(1-x^2)}\right) \leq \frac{x^2}{3} + (1-y^2) + \frac{y^2}{3} + (1-x^2)$$

$$= \frac{x^2}{3} - x^2 - y^2 + \frac{y^2}{3} + 2 = \frac{-2(x^2+y^2)+6}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2}{3}(1-y^2)} + \sqrt{\frac{y^2}{3}(1-x^2)} \leq \frac{-(x^2+y^2)+3}{3}$$

$$\Rightarrow x+y+\sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{x^2}{3}(1-y^2)} + \sqrt{\frac{y^2}{3}(1-x^2)}\right) \leq x+y + \frac{-\sqrt{3}}{3}(x^2+y^2) + \sqrt{3}$$

Mặt khác $(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow 2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}(x^2+y^2) \leq -\frac{\sqrt{3}}{6}(x+y)^2$

$$\Rightarrow x+y+\sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{x^2}{3}(1-y^2)} + \sqrt{\frac{y^2}{3}(1-x^2)}\right) \leq x+y + \frac{-\sqrt{3}}{6}(x+y)^2 + \sqrt{3}$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{6}(x+y)^2 + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}(x+y) + \frac{-3\sqrt{3}}{6} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{-\sqrt{3}}{6}\left[(x+y)^2 - 2\sqrt{3}(x+y) + 3\right] + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{6}(x+y-\sqrt{3})^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy } x+y+x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (đpcm)}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (thỏa mãn ĐK $0 < x; y < 1$)

Cách 2: BĐT tương đương $9 - 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}y - 2\sqrt{3}x\sqrt{1-y^2} - 2\sqrt{3}y\sqrt{1-x^2} \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2\sqrt{3}x + \frac{3}{2} + 2y^2 - 2\sqrt{3}y + \frac{3}{2} + x^2 - 2\sqrt{3}x\sqrt{1-y^2} + 3 - 3y^2 + y^2 - 2\sqrt{3}y\sqrt{1-x^2} + 3 - 3x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x - \sqrt{3(1-y^2)}\right)^2 + \left(y - \sqrt{3(1-x^2)}\right)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (thỏa mãn ĐK $0 < x; y < 1$)

Lời giải: Nguyễn Ngọc Hùng – THCS Hoàng Xuân Hãn – Đức Thọ - Hà Tĩnh
(Dự đoán có 10 câu và mỗi câu là 1 điểm)

Bài 1: Rút gọn các biểu thức

a) $P = \sqrt{8} - \sqrt{18} + 2\sqrt{32}$

b) $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{x-4}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 16$

Bài 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

Bài 3: Cho phương trình bậc hai $x^2 - 4x + m + 2 = 0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình khi $m = 2$

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3(x_1 + x_2)$

Bài 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $y = (m^2 + 2)x + m$ và đường thẳng $y = 6x + 2$. Tìm m để hai đường thẳng đó song song với nhau

Bài 5: Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N thuộc (O)). Qua A vẽ một đường thẳng cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, C phân biệt (B nằm giữa A, C). Gọi H là trung điểm đoạn thẳng BC

a) Chứng minh rằng tứ giác ANHM nội tiếp được đường tròn

b) Chứng minh rằng $AN^2 = AB.AC$

c) Đường thẳng qua B song song với AN cắt đoạn thẳng MN tại E. Chứng minh rằng $EH \parallel NC$

Bài 6: Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $0 < x < 1, 0 < y < 1$

Chứng minh rằng $x + y + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

LỜI GIẢI

Bài 1: a) $P = \sqrt{4.2} - \sqrt{9.2} + 2\sqrt{16.2} = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

b) $Q = \left[\frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} + \frac{\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}} = \left[\frac{\sqrt{x}-4+\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}$
 $= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}-4}$

Bài 2: Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Bài 3: a) Khi $m = 2$ ta có phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Phương trình có nghiệm kép $x = 2$

b) Ta có $\Delta' = (-2)^2 - (m + 2) = 4 - m - 2 = 2 - m$

Để phương trình bậc hai đã cho có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thì $\Delta' > 0 \Rightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$

Khi đó theo hệ thức Viets ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = m + 2 \end{cases}$

Theo bài ra $x_1^2 + x_2^2 = 3(x_1 + x_2) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3(x_1 + x_2) \Rightarrow 4^2 - 2(m + 2) = 3 \cdot 4$

$\Leftrightarrow 16 - 2m - 4 = 12 \Leftrightarrow 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ (thỏa mãn điều kiện $m < 2$)

Vậy $m = 0$ thỏa mãn bài toán

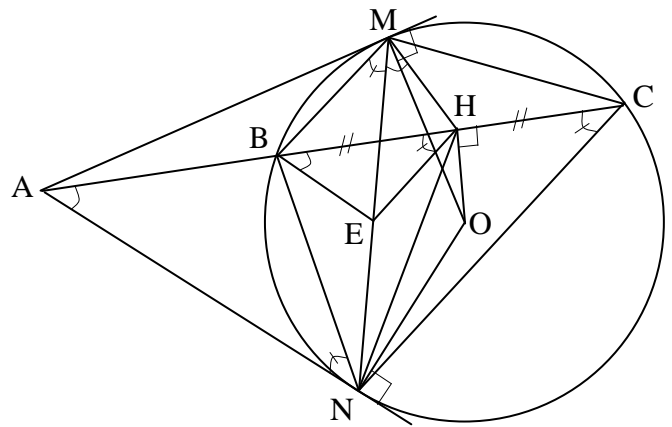
Bài 4: Để hai đường thẳng $y = (m^2 + 2)x + m$ và $y = 6x + 2$ song song với nhau thì

$$\begin{cases} m^2 + 2 = 6 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 4 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq 2 \end{cases} \Rightarrow m = -2$$

Vậy $m = -2$ thỏa mãn bài toán

Bài 5: Giống đề 1

Bài 6: Giống đề 1



Lời giải: Nguyễn Ngọc Hùng – THCS Hoàng Xuân Hãn – Đức Thọ - Hà Tĩnh
(Dự đoán có 10 câu và mỗi câu là 1 điểm)